SISTEMAS FORMAIS

#06 *um conceito de <<verdade>> para o sistema “SOMA”*

Sistema SOMA

Símbolos: $\Sigma = \{+, =, *\}$

Fórmulas: $x + y = z$

Axioma: (A1) $*+*=**$

(R1) $$\frac{x + y = z}{x * + y = z *}$$

(R2) $$\frac{x + y = z}{y + x = z}$$

Verdade para o Sistema SOMA

Vamos definir o conceito de verdade para o sistema soma

Poderíamos chamaremos esse conceito de ***S-verdade***, por exemplo

Verdade para o Sistema SOMA

Definição: Dizemos que uma fórmula

$$x + y = z$$

é *verdadeira* se

o número de ocorrências do símbolo '$*$' antes do símbolo '$=$' é igual ao número de ocorrências de '$*$' após o símbolo '$=$'

Verdade para o Sistema SOMA

Exemplos:

(a) $**+**=****$ é verdadeira

(b) $***+*=**$ não é verdadeira (ou é falsa)

Verdade para o Sistema SOMA

Vamos agora usar <u>indução sobre teoremas</u> para demonstrar que todo teorema do sistema SOMA é verdadeiro

$$\vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \text{ é verdadeiro}$$

Verdade para o Sistema SOMA

(1) Provar que os axiomas de SOMA são verdadeiros

(2) Provar que as regras de inferência *preservam a propriedade* de ser verdadeiro

Verdade para o Sistema SOMA

(1) Provar que os axiomas de SOMA são verdadeiros

Temos um único axioma: $*+*=**$.

Essa fórmula possui 2 símbolos ‘$*$’ de cada lado do símbolo ‘$=$’.

Logo, é verdadeira. ■

Verdade para o Sistema SOMA

(2) Para cada regra de inferência, provar que se suas premissas são verdadeiras, então a sua conclusão também é.

Verdade para o Sistema SOMA

(R1) $$\frac{x + y = z}{x * +y = z *}$$

Hipótese: $x + y = z$ é verdadeira

Tese: $x * +y = z *$ também é verdadeira

Verdade para o Sistema SOMA

Hipótese: $x + y = z$ é verdadeira.

Pela definição, o nº de ocorrências do símbolo '$*$' é igual em ambos os lados do símbolo '$=$'.

Sejam i, j e k o nº de ocorrências do símbolo '$*$' respectivamente em x, y e z.

Verdade para o Sistema SOMA

Hipótese: $x + y = z$ é verdadeira.

Então,

$i + j = k$ (#)

Observação: A fórmula (#) é uma fórmula da aritmética

Tese: $x * + y = z *$

Contando o nº de ocorrências de '$*$' do lado esquerdo:

$x *$: tem $i + 1$
y: continua com j

Contando o nº de ocorrências de '$*$' do lado direito:

$z *$: tem $k + 1$

Usando a equação (#) $i + j = k$ e somando 1 a ambos os lados:

$$(i + 1) + j = k + 1 \quad (\#\#)$$

Tese: $x * +y = z *$

Do lado esquerdo temos

$$i + 1 + j$$

Do lado direito temos

$$k + 1$$

Pela equação (# #) $(i + 1) + j = k + 1$ essas duas quantidades são iguais.

Portanto, a conclusão da regra de inferência (tese) é verdadeira ■.

Verdade para o Sistema SOMA

Demonstramos então que se

(R1) $$\frac{x + y = z}{x * +y = z *}$$

Hipótese: $x + y = z$ é verdadeira

Então

Tese: $x * +y = z *$ também é verdadeira

PRESERVA VERDADE

Verdade para o Sistema SOMA

Fica como exercício provar que (R2) preserva verdade

(R2) $$\frac{x + y = z}{y + x = z}$$

Verdade para o Sistema SOMA

Ao provarmos que
o axioma é verdadeiro
e que as regras de inferência (R1) e (R2)
preservam a verdade,
provamos que todos os teoremas do sistema
SOMA são verdadeiros

Observações finais

Obs. 1: METATEOREMAS

A afirmação "Todo teorema do sistema MAIS é verdadeiro" é um metateorema

Na sua demonstração, utilizamos recursos externos ao próprio sistema

Obs. 2: Recíproca?

Observe que nós demonstramos que

$$\vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \text{ é verdadeiro}$$

Será que vale a recíproca?

SISTEMAS FORMAIS

Episódio #06
UM CONCEITO DE VERDADE
PARA O SISTEMA "SOMA"

NÚMERO IMAGINÁRIO

numeroimaginario.com.br

vinicius@numeroimaginario.com.br